Prof. Dr. Alfred Toth

Relationale Strukturen und Zahlenfolgen

1. Gehen wir von der allgemeinen Form der Peirce-Benseschen triadischen Zeichenrelation

$ZR^3 = (1.a, 2.b, 3.c)$ mit $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$

aus, so lassen sich alle aus ZR^3 konstruierbaren konkreten Zeichenrelationen in eindeutiger Weise durch die Folge ihrer Trichotomien, d.h. durch T = (a, b, c) charakterisieren (i.a.W., es gibt eine bijektive Abbildung von ZR^3 auf T). Zunächst erhalten wir für T die folgende Menge relationaler Strukturen T(S):

$T(S) = (a, b, c), (a, (b, c)), ((a, b), c)$ für $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$.

2. Nun gilt allerdings mit Bense (1979, S. 53)

$ZR^3 = (1.a, 2.b, 3.c) := (1.a, (1.a, 2.b), (1.a, 2.b, 3.c))$,

d.h. das Zeichen wird als eine triadische, sich selbst enthaltende, "Relation über Relationen" oder "verschachtelte" Relation über einer monadischen, dyadischen und triadischen Teilrelation (besser: Menge von mon., dyad. u. triad. Teilrelationen) definiert. Damit bekommen wir also (mit Weglassung der Klammern)

$T = (a, b, c) := (a, (a, b), (a, b, c)) = (a, a, b, a, b, c)$,

d.h. natürlich eine fraktale Zahlenfolge, die für n-adische Relationen mit n = 3 mit dem Anfang der "doubly fractal sequence" A002260 (OEIS) korrespondiert:

A002260 Integers 1 to k followed by integers 1 to k+1 etc. (a fractal sequence).

1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 1, 2, 3

3.1. Da jedoch die Belegung der Elemente von T frei ist, müssen auch die Permutationen von T, d.h. $\wp$(T) = ((a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)), berücksichtigt werden, denn diese Strukturen sind weder semiotisch noch arithmetisch paarweise isomorph. Um $\wp$(T) aufzuzeigen, führen wir für die verbleibenden fünf Fälle die Klammerung wieder ein. Für den ersten, soeben behandelten Fall haben wir natürlich

(1, (1, 2), (1, 2, 3)), (1, ((1, 2), (1, 2, 3))), ((1, (1, 2)), (1, 2, 3)).

3.2. (1, (1, 2, 3), (1, 2)), (1, ((1, 2, 3), (1, 2))), ((1, (1, 2, 3)), (1, 2))

A194832 Triangular array (and fractal sequence): row n is the permutation of (1,2,...,n) obtained from the increasing ordering of fractional parts {r}, {2r}, ..., {nr}, where r=-tau=-(1+sqr(5))/2.

1, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 3, 1, 4, 2, 5, 3, 6, 1, 4, 2, 5, 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 1, 9, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 1, 9, 4, 7, 2, 10, 5, 8, 3, 11, 6, 1, 9, 4, 7, 2, 10, 5, 8, 3, 11, 6, 1, 9, 4, 12, 7, 2, 10, 5, 8, 3, 11, 6, 1, 9, 4, 12, 7, 2, 10, 5, 13, 8, 3, 11

3.3. ((1, 2), 1, (1, 2, 3)), ((1, 2), (1, (1, 2, 3))), (((1, 2), 1), (1, 2, 3))

A056169 Number of unitary prime divisors of n.

0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 3, 1, 0, 2, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 1, 0, **1, 2, 1, 1, 2, 3,** 1, 1, 0, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 3, 1, 1, 3

3.4. ((1, 2), (1, 2, 3), 1), ((1, 2), ((1, 2, 3), 1)), (((1, 2), (1, 2, 3)), 1)

A002260 Integers 1 to k followed by integers 1 to k+1 etc. (a fractal sequence)

1, **1, 2, 1, 2, 3, 1,** 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 1, 2, 3

3.5. ((1, 2, 3), 1, (1, 2)), ((1, 2, 3), (1, (1, 2))), (((1, 2, 3), 1), (1, 2))

A000188 (1) Number of solutions to x^2 = 0 (mod n). (2) Also square root of largest square dividing n. (3) Also Max_{ d divides n } GCD[d,n/d]

1, 1, 1, 2, 1, 1, **1, 2, 3, 1, 1, 2**, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 5, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 4, 7, 5, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 8, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 4, 9, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3

3.6. ((1, 2, 3), (1, 2), 1), ((1, 2, 3), ((1, 2), 1)), (((1, 2, 3), (1, 2)), 1)

A190496 [(bn+c)r]-b[nr]-[cr], where (r,b,c)=(sqrt(2),3,2) and []=floor

2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, **1, 2, 3, 1, 2, 1**, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 0

4. An dieser Stelle muß man sich allerdings fragen, wie sich grundätzlich semiotische und arithmetische Folgen unterscheiden. Fassen wir kurz einige zentrale, hier sowie in Toth (2012a-d) gewonnene Ergebnisse zusammen:

4.1. Von (3.a, 2.b, 1.c), also der Peirceschen, mit dem Interpretanten beginnenden, "retrosemiosischen" (der "pragmatischen Maxime" verdankte) Ordnung der dyadischen Partialrelationen, gelangt man zu (1.a, 2.b, 1.c) durch Auflösung der semiotischen Opposition zwischen semiosischer und retrosemiosischer Ordnung, indem man einfach von Relationen und deren Konversen spricht.

4.2. Durch Aufhebung der Ordnungssrestriktion ($a \leq b \leq c$) für die trichotomischen Werte gelangt man von der Menge der 10 Peirceschen Zeichenklassen zur Menge der $3^3 = 27$ Bedeutungsklassen (vgl. Bense ap. Walther 1979, S. 80).

4.3. Durch Aufhebung des Triadizitätsprinzips (der Forderung der paarweisen Verschiedenheit der semiotischen Werte für die Triaden) gelangt man von den 27 Bedeutungsklassen zu den 243 Relationen, welche über dem Schema (a.b, c.d, e.f) für a, ..., f $\in$ {1, 2, 3} konstruierbar sind.

4.4. Ein weiterer entscheidender Schritt in der Auflösung semiotischer ad hoc-Limitationen besteht nun darin, die Äquilibration zwischen triadischen und trichotomischen semiotischen Werten aufzuheben. Wie man sich erinnert, läßt sich ja jede triadische Zeichenrelation in drei Dyaden zerlegen (Toth 2012e), und diese sind als kartesische Produkte aus den Benseschen Primzeichen (Bense 1981, S. 17 ff.) durch Selbstabbildung der Menge der Primzeichen in sich selbst (PZ $\times$ PZ) definiert, d.h., salopp gesagt, triadische und trichotomische Relationen haben dieselbe "Valenzzahl", da die Werte ja aus ein und demselben Wertevorrat, d.h. PZ, stammen. Wenn wir aber nun für die triadischen (T) und die trichotomischen Primzeichen (t) diese "Valenz-Restriktion" aufheben, haben wir also die möglichen allgemeinen Fälle

$T = t$ (klassischer, Peirce-Bensescher Fall)

$T > t$ (z.B. 3-adische 2-otomische Rel.)

$T < t$ (z.B. 3-adische 4-tomische Rel.)

Die arithmetische Konsequenz der Aufhebung dieser semiotischen ad hoc-Beschränkung, welche nur den Fall $T = t$ erlaubt, ist also, daß bei Zahlenfolgen bei jedem (n+1)-Schritt nicht sämtliche Schritte (1, ..., n) iteriert werden müssen, d.h. es handelt sich bei den durch $T > t$ und $T < t$ konstruierbaren Zahlenfolgen um partielle fraktale Folgen, wie z.B.

$(1, 1, 2, 1, 2, 3) \Longrightarrow (1, 1, 2, 1, 3) \Longrightarrow (1, 1, 2, 2, 3) \Longrightarrow (1, 2, 1, 2, 3) \Longrightarrow (1, 1, 2, 3) \Longrightarrow (1, 2, 3)$

Wie man anhand dieses Beispiels erkennt, steht also am Ende dieser Folgen-Transformation die "unverschachtelte" Zeichenrelation ZR^3. Daraus geht in Sonderheit hervor, daß die semiotische Interpretation der Folgenglieder 1, 2 und 3 in (1, 2, 3) eine Abbildung der Peirceschen Modalkategorien Möglichkeit, Wirklichkeit und Notwendigkeit auf eine Teilfolge der Folge der natürlichen Zahlen (Peanozahlen, wie bereits Bense 1975, S. 167 ff. sah und Peirce selbst anläßlich seiner "Axioms of Numbers", vgl. Bense 1983, S. 192 ff. gesehen haben muß) darstellt, wobei die Modalkategorien auf irgendeine Teilfolge (abc) abbildbar wäre. Was jedoch eine semiotische Relation von einer arithmetischen Relation unterscheidet, ist die Fraktalität der semiotischen Zahlenfolge, obwohl natürlich nicht jede fraktale Zahlenfolge eo ipso eine Zeichenrelation darstellt und obwohl partielle Fraktalität, wie man in 4.4. gesehen hat, möglich ist, ohne den Zeichenbegriff über Bord zu werfen. **Wir dürfen somit schließen, daß semiotische Relationen eine spezielle Teilklasse selbstähnlicher, d.h. fraktaler Zahlenfolgen sind.**

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Toth, Alfred, Die triadische Zeichenrelation als Fragment einer fraktalen Sequenz. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012a

Toth, Alfred, Skizze einer fraktalen Sequenz-Semiotik unter Einschluss der Nullheit. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012b

Toth, Alfred, Zur Selbstähnlichkeit extrinsischer und intrinsischer Zeichenrelationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012c

Toth, Alfred, Partiell selbstähnliche Zeichenzahlen-Folgen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012d

Toth, Alfred, Walthers Vereinigung von Dyaden als Robertson-Triaden. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012e

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

14.3.2012